

Mirosław LIANA*

O REDUKCJI LICZBY PARAMETRÓW WIELOCZĘŚCIOWYCH UKŁADÓW TRANSPORTOWYCH WYSTĘPUJĄCYCH W SYSTEMACH GOSPODARKI ZASOBAMI

Przedmiotem badań są wieloczęściowe, ciągłe układy transportowe występujące w wielu systemach gospodarki zasobami. Ich funkcjonowanie scharakteryzowano procesem stochastycznym Markowa. Wyprowadzono zależności pozwalające redukować liczbę parametrów charakteryzujących awaryjność układu transportowego. Wyniki te umożliwiają prowadzenie dalszych analitycznych badań systemów gromadzenia zasobów ze złożonymi układami transportowymi, a w szczególności wykorzystanie w nich wyników uzyskanych dla jednoczęściowych układów transportowych.

1. Wprowadzenie

Układy transportowe stanowią jedną z fundamentalnych części szeroko pojętych systemów gospodarki zasobami. Różnorodne systemy tego typu są przedmiotem badań i analiz od ponad 50 lat, a o tym, że tematyka jest wciąż interesująca, świadczą liczne publikacje krajowe (np. [1], [4], [12], [14]) i zagraniczne (np. [7], [8], [13], [15], [17], [18]). Niejednokrotnie analizowano systemy (np. [4], [10], [11], [14]), w których układy transportowe współpracują z magazynem-zbiornikiem. W pracy rozpatruje się wieloczęściowe, złożone „równoległe” bądź „szeregowo”, ciągłe układy transportowe, których przykładami mogą być np. taśmociągi, ropociągi, gazociągi czy też wodociągi.

Zakłada się, że każdy z podukładów układu złożonego, bez względu na konfigurację w jakiej pracuje, niezależnie od pozostałych podukładów, może ulegać losowym awariom. Podukład może ulec awarii jedynie podczas swojej pracy oraz awaria co najmniej dwóch podukładów w tej samej chwili t jest zdarzeniem praktycznie niemoż-

* Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza, ul. Wincentego Pola 2, 35-965 Rzeszów.

liwym (występującym z prawdopodobieństwem równym 0). Obserwując funkcjonowanie układu transportowego przez dostatecznie długi okres, można oszacować średni czas trwania awarii oraz częstość i prawdopodobieństwo awarii. Parametry te charakteryzują awaryjność układu transportowego, por. [4], [9], [12].

Funkcjonowanie i -tego podukładu opisuje dwustanowy proces stochastyczny $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$), gdzie n oznacza liczbę podukładów, $X_i(t)=0$ – pracę, natomiast $X_i(t)=1$ – awarię i -tego podukładu. O procesach $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) zakłada się, że są stacjonarnymi, jednorodnymi procesami Markowa (zob. [2], [5]). Prawdopodobieństwa przejścia między stanami procesów $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) w przedziale czasu $(0, \tau)$, $\tau > 0$ określa się następująco:

$$\begin{cases} p_{01}^i(\tau) = P(X_i(t+\tau)=1 | X_i(t)=0) = \lambda_i \tau + o(\tau), \\ p_{00}^i(\tau) = P(X_i(t+\tau)=0 | X_i(t)=0) = 1 - \lambda_i \tau + o(\tau), \\ p_{10}^i(\tau) = P(X_i(t+\tau)=0 | X_i(t)=1) = \mu_i \tau + o(\tau), \\ p_{11}^i(\tau) = P(X_i(t+\tau)=1 | X_i(t)=1) = 1 - \mu_i \tau + o(\tau), \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie: $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{o(\tau)}{\tau} = 0$, λ_i – intensywność powstawania awarii w i -tym podukładzie, μ_i – intensywność likwidowania awarii w i -tym podukładzie [9], [12].

Prawdopodobieństwo, że proces Markowa $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i=1, \dots, n$) opisujący pracę i -tego podukładu znajdzie się w stanie k ($k=0, 1$) w chwili $(t+\tau)$ zależy od stanu, w którym proces przebywał w chwili t zgodnie z równością [2], [5]:

$$\begin{aligned} & P(X_i(t+\tau)=k) \\ &= P(X_i(t+\tau)=k | X_i(t)=k)P(X_i(t)=k) \\ &+ \sum_{m \neq k} P(X_i(t+\tau)=k | X_i(t)=m)P(X_i(t)=m). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Uwzględniając założenie, że: $p_k^i = P(X_i(t+\tau)=k) = P(X_i(t)=k)$ dla $t \geq 0$, $\tau > 0$ z powyższej równości otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} p_0^i = p_0^i p_{00}^i(\tau) + p_1^i p_{10}^i(\tau), \\ p_1^i = p_0^i p_{01}^i(\tau) + p_1^i p_{11}^i(\tau). \end{cases} \quad (1.3)$$

Uwzględniając z kolei (1.1), redukując wyrazy podobne i przechodząc do granicy przy $\tau \rightarrow 0^+$ uzyskuje się układ równań zależnych:

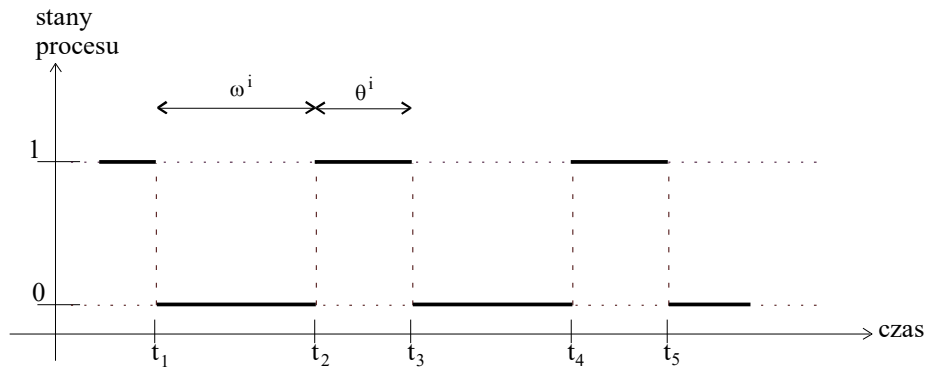
$$\begin{cases} -\lambda p_0^i + \mu p_1^i = 0, \\ \lambda p_0^i - \mu p_1^i = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dołączając warunek: $p_0^i + p_1^i = 1$, wyznacza się prawdopodobieństwa przebywania procesu $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) w danym stanie (pracy lub awarii) w zależności od intensywności przejść pomiędzy stanami:

$$p_0^i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad p_1^i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (1.5)$$

Oprócz prawdopodobieństw przebywania w poszczególnych stanach, innymi ważnymi charakterystykami opisującymi proces $\{X_i(t), t \geq 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) są: v_0^i – częstość wejścia do stanu pracy, v_1^i – częstość wejścia do stanu awarii. Dla opisywanego dwustanowego procesu częstości te są równe, ponieważ częstość wejścia do stanu pracy jest równa częstości wyjścia z niego, czyli wejścia do stanu awarii ($v_0^i = v_1^i$).

Częstość wejścia do stanu pracy (v_0^i) jest odwrotnością średniego czasu pomiędzy dwoma kolejnymi wejściami do tego stanu, który z kolei jest sumą średnich: czasu pracy (ω^i) i czasu awarii (θ^i), (rys.1).



Rys. 1. Trajektoria pewnej realizacji procesu $X_i(t)$

Otrzymujemy zatem:

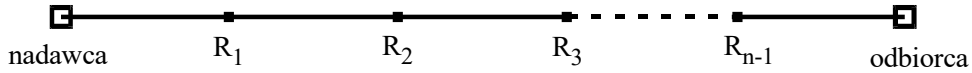
$$v_0^i = \frac{1}{\omega^i + \theta^i} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\mu_i}} = \frac{\lambda_i \mu_i}{\lambda_i + \mu_i} = p_1^i \mu_i = p_0^i \lambda_i = v_1^i, \quad (1.6)$$

ponieważ: $\omega^i = \frac{1}{\lambda_i}$, $\theta^i = \frac{1}{\mu_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Funkcjonowanie i -tego podukładu ($i = 1, \dots, n$) charakteryzują więc intensywności λ_i i μ_i , które jednoznacznie określają zarówno prawdopodobieństwo przebywania układu transportowego w stanie pracy bądź awarii (1.5), jak też częstość wejścia do tych stanów (1.6).

2. Model złożonego „szeregowo” układu transportowego

Zakłada się, że układ transportowy łączący nadawcę zasobu z jego odbiorcą składa się z n podukładów połączonych szeregowo w punktach rewersji R_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) (rys. 2).



Rys. 2. Schemat „szeregowo” złożonego układu transportowego

Funkcjonowanie układu transportowego jako całości opisuje się wektorowym procesem stochastycznym $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, gdzie $\mathbf{X}(t) = \langle X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t) \rangle$. Stany tego procesu oznacza się n -elementowymi ciągami złożonymi z 0 i 1, gdzie 0 (1) na i -tej pozycji oznacza pracę (awarię) i -tego podukładu, $i = 1, 2, \dots, n$.

Układ transportowy funkcjonuje, gdy są sprawne wszystkie jego części; awaria którejkolwiek z nich unieruchamia całość układu transportowego. Wektorowy proces $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ osiąga jedynie stany oznaczone ciągami z co najwyżej jedną jedynką (1).

Wprowadza się więc oznaczenia:

stan $\mathbf{0}$ – wszystkie podukłady są sprawne (ciąg złożony z samych 0),

stan \mathbf{i} – i -ty podukład jest niesprawny (1 na i -tej pozycji w ciągu), $i = 1, 2, \dots, n$.

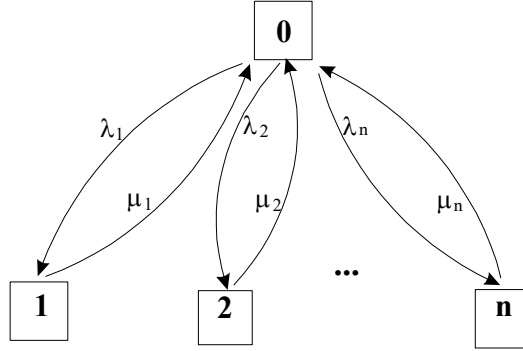
Przejścia procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ pomiędzy tak zakodowanymi stanami przedstawia rys. 3 i wzory (2.1):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{0i}(\tau) &= P(\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{i} | \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}) = \lambda_i \tau + o(\tau), \\
 \mathbf{p}_{00}(\tau) &= P(\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{0} | \mathbf{X}(t) = \mathbf{0}) = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau + o(\tau), \\
 \mathbf{p}_{i0}(\tau) &= P(\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{0} | \mathbf{X}(t) = \mathbf{i}) = \mu_i \tau + o(\tau), \\
 \mathbf{p}_{ii}(\tau) &= P(\mathbf{X}(t + \tau) = \mathbf{i} | \mathbf{X}(t) = \mathbf{i}) = 1 - \mu_i \tau + o(\tau),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $\tau > 0$, $t \geq 0$.

Podobnie jak w pkt.1 (porównaj 1.3) otrzymuje się układ równań (2.2):

$$\begin{cases} \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_{00}(\tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i0}(\tau), & \sum_{j=0}^n \mathbf{p}_j = 1. \\ \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 \mathbf{p}_{0i}(\tau) + \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{ii}(\tau) \end{cases} \quad (2.2)$$



Rys. 3. Schemat przejść pomiędzy stanami procesu $\mathbf{X}(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego „szeregowo” układu transportowego

Rozwiązania równań (2.2) dają behawioralną (analityczną) zależność prawdopodobieństw \mathbf{p}_j od intensywności powstawania λ_i oraz intensywności likwidowania awarii μ_i w poszczególnych podukładach układu transportowego:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad \mathbf{p}_j = \frac{\frac{\lambda_j}{\mu_j}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad \text{dla } \mathbf{j}=1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

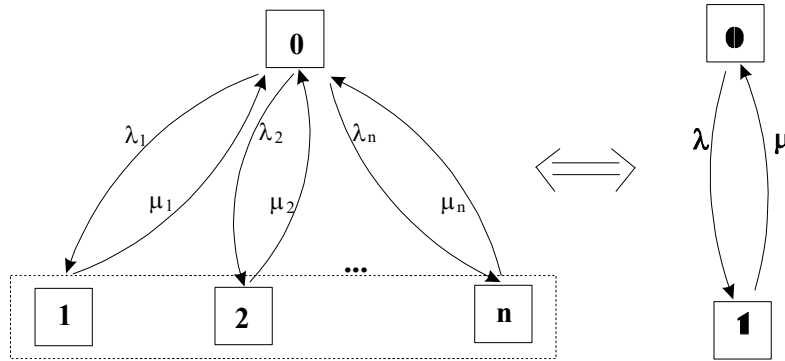
Ponieważ przyjmuje się, że częstość awarii układu transportowego jest niezależna od konfiguracji w jakiej pracuje (czy jest samodzielną jednostką, czy tylko częścią współpracującą z pozostałymi częściami całości), można wykorzystać zależność (1.6) do wyznaczenia częstości wejść procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ do stanu \mathbf{i} ($\mathbf{i}=1, 2, \dots, n$):

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_0 \lambda_i = \frac{\lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (2.4)$$

Aby wyznaczyć częstość \mathbf{v}_0 , wystarczy zauważyć, że proces $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ tak często wpada w stan $\mathbf{0}$, jak często w sumie wychodzi ze stanów \mathbf{i} ($\mathbf{i}=1, 2, \dots, n$), zatem:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (2.5)$$

Aby określić prawdopodobieństwa pracy i awarii oraz częstość awarii złożonego układu transportowego, na wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisujący jego pracę należy spojrzeć jak na proces dwustanowy (stan pracy $\mathbf{0}$ i stan awarii $\mathbf{1}$). Stan pracy to stan $\mathbf{0}$, stan awarii natomiast uzyskuje się przez „zlepianie” stanów \mathbf{i} ($\mathbf{i} = 1, 2, \dots, n$) (rys.4).



Rys. 4. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie złożonego „szeregowo” układu transportowego

Wykorzystując wyniki (2.3), (2.4) i (2.5), uzyskuje się żądane prawdopodobieństwa pracy oraz awarii złożonego układu transportowego:

$$P(\mathbf{X}(t) = 0) = \mathbf{p}_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}},$$

$$P(\mathbf{X}(t) = 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (\mathbf{X}(t) = \mathbf{i})\right) = \sum_{i=1}^n P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{i}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \quad (2.6)$$

oraz częstości „wejścia” w oba stany:

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}, \quad \mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \quad (2.7)$$

Tak określone charakterystyki procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisującego funkcjonowanie złożonego „szeregowo” układu transportowego zależą od n par parametrów (λ_i, μ_i) . Powstaje problem, czy ten „dwustanowy” wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ można opisać za pomocą jedynie dwóch parametrów (λ, μ) , podobnie jak proces $\{X_i(t), t \geq 0\}$ omawiany w punkcie pierwszym. Gdyby było to możliwe, wtedy na podstawie (1.5) oraz (1.6):

$$P(\mathbf{X}(t) = 0) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P(\mathbf{X}(t) = 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (2.8)$$

oraz

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mu\lambda}{\mu + \lambda} = \mathbf{v}_1. \quad (2.9)$$

Oczywiście, taki opis nie mógłby zmieniać prawdopodobieństw pracy i awarii złożonego układu oraz częstości awarii. Przyrównując zatem (2.6) i (2.8) oraz (2.7) i (2.9), następnie rozwiązując powstały układ równań względem λ i μ , uzyskuje się

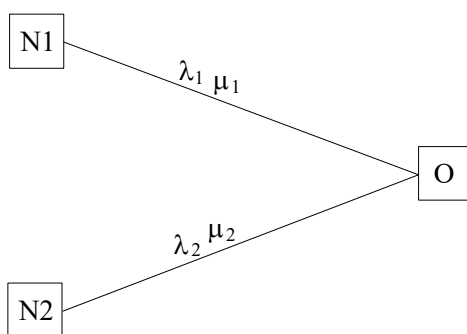
$$\begin{cases} \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ \mu = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Zależności (2.10) jednoznacznie przedstawiają intensywności: powstawania awarii (λ) i likwidowania awarii (μ) dla wektorowego procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ jako funkcje intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii procesów składowych $\{X_i(t), t \geq 0\}$, gdzie $i = 1, \dots, n$. Nie zmienia to przy tym ważnych parametrów charakteryzujących awaryjność modelowanego złożonego „szeregowo” układu transportowego.

3. Model złożonego „równoległy” układu transportowego

Jeżeli układ transportowy łączy dwóch nadawców (N1, N2) z jednym odbiorcą (O), (rys.5), to faktycznie dzieli się na dwa niezależnie funkcjonujące podukłady.

Podobnie jak w pkt. 2, funkcjonowanie układu transportowego jako całości opisuje się wektorowym procesem stochastycznym $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$, gdzie $\mathbf{X}(t) = \langle X_1(t), X_2(t) \rangle$. Stany tego procesu oznacza się dwuelementowymi ciągami złożonymi z 0 i 1, gdzie 0 (1) na i -tej pozycji oznacza pracę (awarię) i -tego podukładu, $i = 1, 2$.



Rys. 5. Schemat złożonego „równoległy” układu transportowego

Wprowadzono następujące oznaczenie stanów procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$:

- $\mathbf{0} := (0, 0)$ – oba podukłady pracują,
- $\mathbf{1} := (1, 0)$ – pierwszy podukład jest niesprawny,
- $\mathbf{2} := (0, 1)$ – drugi podukład jest niesprawny,
- $\mathbf{3} := (1, 1)$ – oba podukłady są niesprawne.

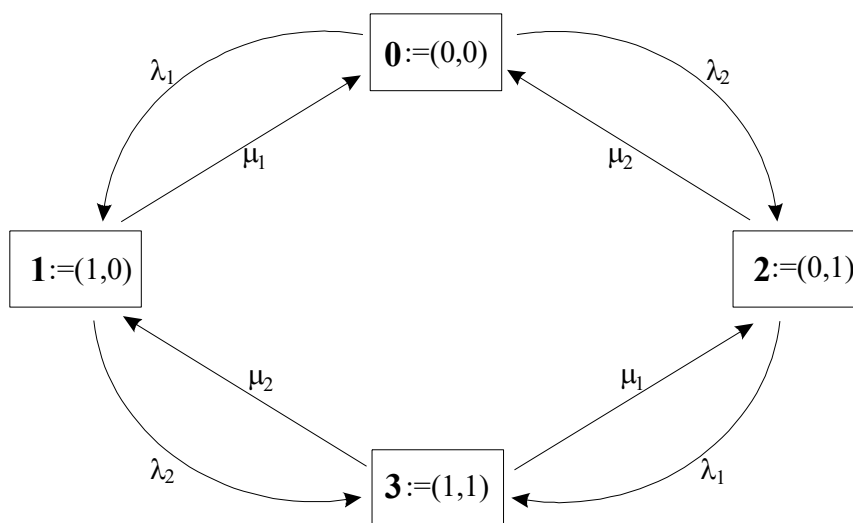
Wykorzystując założenie o niezależności funkcjonowania obu podukładów (wówczas: $P(\mathbf{X}(t) = (k, m)) = P(X_1(t) = k) P(X_2(t) = m)$ dla $k, m = 0, 1$) oraz wzory (1.5), otrzymuje się prawdopodobieństwa przebywania złożonego układu transportowego w poszczególnych stanach:

$$\begin{aligned}
 p_0 &= P(\mathbf{X}(t) = (0,0)) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \\
 p_1 &= P(\mathbf{X}(t) = (1,0)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, \\
 p_2 &= P(\mathbf{X}(t) = (0,1)) = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$p_3 = P(\mathbf{X}(t) = (1,1)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2},$$

gdzie $t \geq 0$.

Poniżej przedstawiono schemat przejść (rys. 6) pomiędzy stanami procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$.



Rys. 6. Schemat przejść pomiędzy stanami wektorowego procesu $\mathbf{X}(t)$ opisującego funkcjonowanie złożonego „równoległe” układu transportowego

Aby wyznaczyć częstości wejścia procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ do poszczególnych stanów, wykorzystuje się zależność:

$$v_j = \sum_{s \neq j} p_s \pi_{sj}, \quad (3.2)$$

gdzie π_{sj} – intensywność prawdopodobieństwa przejścia ze stanu s do j ($j, s \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Stąd:

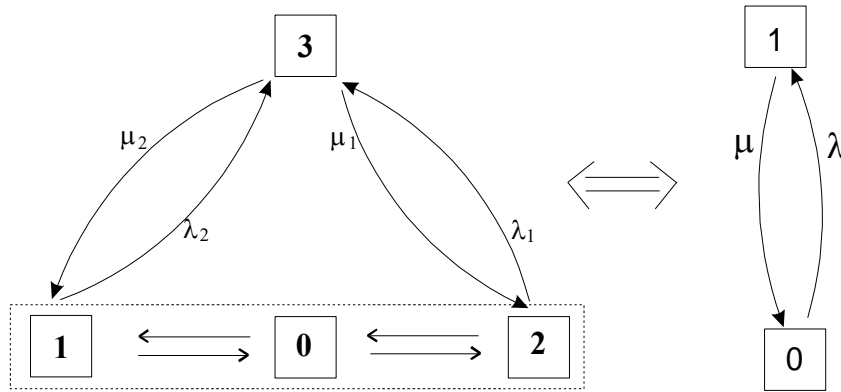
$$\begin{aligned} v_0 &= p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} (\lambda_1 + \lambda_2) \\ v_1 &= p_0 \lambda_1 + p_3 \mu_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} (\mu_1 + \lambda_2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$v_2 = p_0 \lambda_2 + p_3 \mu_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} (\mu_2 + \lambda_1)$$

$$v_3 = p_1 \lambda_2 + p_2 \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} (\mu_1 + \mu_2).$$

Wzory (3.1) określają prawdopodobieństwa przebywania procesu wektorowego $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ w poszczególnych stanach, a wzory (3.3) częstości wejścia do tych stanów jako funkcje intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii w poszczególnych podukładach.

Aby określić prawdopodobieństwa pracy i awarii oraz częstość awarii złożonego układu transportowego, wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisujący jego pracę należy potraktować jak proces dwustanowy (stan pracy $\mathbf{0}$ i stan awarii $\mathbf{1}$). Stanem awarii jest stan $\mathbf{3}$ procesu wektorowego, ponieważ tylko wtedy odbiorca nie otrzymuje zasobu. Stan pracy uzyskuje się przez „zlepianie” pozostałych stanów ($\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}$) (rys. 7).



Rys. 7. Schemat „zlepiania” stanów procesu wektorowego opisującego funkcjonowanie złożonego „równoległe” układu transportowego

Z zależności (3.1) uzyskuje się żądane prawdopodobieństwa pracy oraz awarii złożonego układu transportowego:

$$P(\mathbf{X}(t) = 0) = P\left(\bigcup_{j=0}^2 (\mathbf{X}(t) = j)\right) = \sum_{j=0}^2 P(\mathbf{X}(t) = j) = \frac{\mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1 + \mu_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad (3.4)$$

$$P(\mathbf{X}(t) = 1) = P(\mathbf{X}(t) = 3) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}.$$

Częstość wejścia w stan awarii (równa częstości wejścia w stan pracy) uzyskuje się z (3.3):

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot (\mu_1 + \mu_2) = \mathbf{v}_1. \quad (3.5)$$

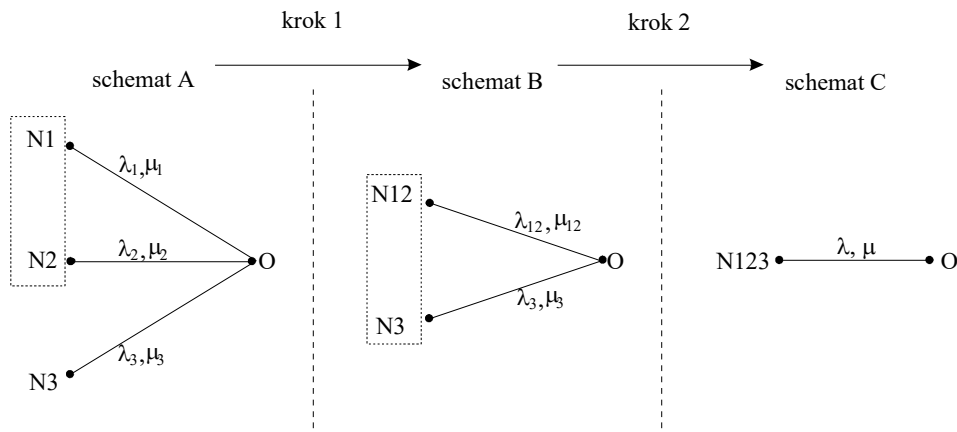
Aby ten „dwustanowy” wektorowy proces stochastyczny $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ opisać za pomocą jedynie dwóch parametrów (λ, μ) , podobnie jak w pkt.2., tak, by nie zmieniać prawdopodobieństw pracy i awarii złożonego układu oraz częstości awarii, przyrównuje się (2.8) i (3.4) oraz (2.9) i (3.5). Po rozwiązaniu powstałego układu równań względem λ i μ uzyskuje się:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}}, \\ \mu = \mu_1 + \mu_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Można więc intensywności: powstawania awarii (λ) i likwidowania awarii (μ) dla wektorowego procesu $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ przedstawić jednoznacznie jako funkcje intensywności powstawania (λ_i) i likwidowania (μ_i) awarii procesów składowych $\{X_i(t), t \geq 0\}$, gdzie $i = 1, 2$.

4. Odniesienie do zwielokrotnionych połączeń równoległych

Wzory (3.6) można stosować również w przypadku bardziej złożonych układów, w których jeden odbiorca jest połączony układem transportowym z wieloma dostawcami.



Rys. 8. Schemat redukcji parametrów

Dla przykładu rozpatrzono system z trzema dostawcami (rys. 8, schemat A). Procedura postępowania jest wtedy dwukrokowa. W pierwszym kroku przechodzi się ze schematu A do B poprzez „zlepianie” dwóch podukładów, np. pierwszego i drugiego. Ten „zlepiony” podukład opisują intensywności $\lambda_{1,2}$ i $\mu_{1,2}$ wyznaczone zgodnie z (3.6):

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\frac{\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}}, \\ \mu_{1,2} = \mu_1 + \mu_2. \end{cases}$$

Z kolei w drugim kroku przechodzi się ze schematu B do C, dla którego (na podstawie (3.6)):

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\mu_{1,2} + \mu_3}{\frac{\mu_{1,2}}{\lambda_{1,2}} + \frac{\mu_3}{\lambda_3} + \frac{\mu_{1,2}}{\lambda_{1,2}} \cdot \frac{\mu_3}{\lambda_3}}, \\ \mu = \mu_{1,2} + \mu_3. \end{cases}$$

Tak wyznaczone parametry λ , μ są odpowiednio intensywnościami powstawania i likwidowania awarii w tym trzyczęściowym układzie transportowym. Opisana procedura pozwala dowolnie duże układy transportowe charakteryzować za pomocą tylko dwóch parametrów: λ , μ .

5. Podsumowanie

W poprzednich punktach pokazano, jak odpowiedni proces stochastyczny może modelować funkcjonowanie prostego lub złożonego („szeregowo” lub „równoległe”) układu transportowego. Okazuje się, że model prosty opisany w punkcie pierwszym można z powodzeniem stosować również do opisu złożonych układów (zamiast procesu wektorowego). Pozwalają na to wzory (2.10) oraz (3.6). Dzięki nim następuje redukcja parametrów charakteryzujących funkcjonowanie układu transportowego, zamiast bowiem n par (λ_i, μ_i) wystarczy jedna para (λ, μ) . Redukcja taka znacznie upraszcza analizę ekonomiczną systemów gospodarki zasobami, w których złożony układ transportowy współpracuje np. z magazynem-zbiornikiem (zob. [4], [11]). Można wtedy również zaadaptować wyniki uzyskane dla systemów gromadzenia zapasów z jednoczęściowym układem transportowym (zob. [1], [6], [10], [14], [16]) do systemów z układami złożonymi.

Podobne zasady redukcji w przypadku uogólnionych sieci czynności opisano np. w pracy [3].

Bibliografia

- [1] BOROWSKA M., GALANC T., *Probabilistyczny opis wąskiego gardła w pewnym systemie gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje 1994, nr 4.
- [2] DOOB J.L., *Stochastic Processes*, Wiley, New York 1953.
- [3] ELMAGHRABY S.E., *Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models*, New York 1977.
- [4] GALANC T., *Prognozowanie trajektorii systemu cybernetycznego wyznaczonych przez cel sterowania*, Prace Naukowe Ośrodka Badań Progностycznych Politechniki Wrocławskiej nr 16, Seria: Monografie nr 4, Wrocław 1984.
- [5] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968.
- [6] GŁADYSZ S., *Leistungsfähigkeit des Bandanlagensystems*, Węgiel Brunatny 1965, nr 7.
- [7] YANO C.A., LEE H.L., *Lot-sizing with random yields: a review*, Operations Research 1995, 43.
- [8] KOSTER M.B.M., *Capacity oriented analysis and design of production systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1989.
- [9] KRÓL M., *O pewnym wariancie ekstremalnym prawdopodobieństwa przejścia w wektorowym procesie stochastycznym typu Markowa*, Zeszyty Naukowe PRz, nr 16, Matematyka i Fizyka 1984, z. 2.
- [10] KRÓL M., *O wskaźnikach oceny niekorzystnych zjawisk w pracy pewnego systemu gospodarki zapasami*, Badania Operacyjne i Decyzje 1992, nr 4.
- [11] KRÓL M., LIANA M., *Wpływ miejsca instalacji magazynu-zbiornika w systemie transportowym na straty spowodowane deficytem lub przepełnieniem*, Badania Operacyjne i Decyzje 1997, nr 2.
- [12] KRÓL M., STARTEK M., *The stochastic analysis of continuous transport system with the storage reservoir*, Zeszyty Naukowe PRz, nr 134, Matematyka 1995, z.17.
- [13] MOINZADEH K., *A Multi-Echelon Inventory System with Information Exchange*, Management Science 2002, nr 48.
- [14] PISULA T., *Analityczna i numeryczna ocena efektywności funkcjonowania pewnego systemu cybernetyczno-ekonomicznego typu „transport-zapasy”*, rozprawa doktorska, Wrocław 1999.
- [15] RUDI N., KAPUR S., PYKE D.F., *A Two-Location Inventory Model with Transshipment and Local Decision Making*, Management Science 2001, nr 47.
- [16] SCHEFFLER D., STOYAN D., STOYAN H., *Eine methode zur Varausberechnung der zeitlichen Auslastung von Abraumförderbrückenbetrieben*, Bergbautechnik 1967, nr 17, Jg. Heft 8.
- [17] SO K.C., *Optimal buffer allocation strategy for minimizing work-in-process inventory in unpaced production lines*, IIE Transactions 1997, 29.
- [18] WANG Y., COHEN M.A., ZHENG Y.-S., *A Two-Echelon Repairable Inventory System with Stocking-Center-Dependent Depot Replenishment Lead Times*, Management Science 2000, nr 46.

Reducing the number of parameters of a multi-component transportation occurring in store management systems

In the paper, multi-component continuous transportation systems occurring in many store management systems have been considered. An operation of transportation systems has been described by Markov stochastic process. Relations allowing reduction of a number of parameters which characterise

a transportation system damage have been presented. So far store management systems concluding only one- or bi-component transportation systems have been analysed in detail. Results obtained in this paper make it possible to keep on carrying out analytical research of store management systems with more complex transportation systems in a similar way.